УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В статье рассматривается решение задачи модального управления для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. При решении задачи модального управления используются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Эти регуляторы используют информацию как о текущем состоянии системы, так и векторы состояний и их производные в предыдущие моменты времени. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния. Указан вид характеристического квазиполинома замкнутой этим регулятором исходной системы нейтрального типа.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

MODAL CONTROL FOR ONE NEUTRAL TYPE SYSTEM

The paper deals with the modal control problems for the stationary two-dimensional dynamical systems with retarded argument of neutral type with one input and one state delay. The definition of a modal control problem for the system is given. For the solution for such a problem we use linear regulators of feedback type, comprising both linear and integral part. These regulators use information on both the current state of the system, and the state vectors and their derivatives in previous times. Regulators are obtained in an explicit form as a basic function of the initial parameters of the system and its state vector. Characteristic quasipolinomial closed by this regulator original system of neutral type is obtained.

Key words: neutral type systems, modal control, regulators, feedback control, lag.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом [1] и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t>0, \qquad (1)$$

где $A_i, i=0,1,2$ – постоянные 2×2-матрицы; $h>0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой 2-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0,\ 1]$ («$'$» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij} x^{(i)}(t-jh) + \int_{-h}^{0} g'(s) x(t+s)\,ds, \qquad (2)$$

где q_{00}, q_{ij} – 2-векторы; $g(s)$, $s\in[-h,0]$ – непрерывная 2-вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i}x(t),\ x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2\right] \equiv \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \tilde{\alpha}_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \qquad (3)$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц $A_i, i=0,1,2$, в частности $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0$, $\tilde{\alpha}_{20} = 1$, $\tilde{\alpha}_{22} = \det A_2$.

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел α_{ij}, $i=0,1,2$, $j=0,1,2$, $\alpha_{20}=1$, найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det\left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 + bU(\lambda)\right] \equiv \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \qquad (4)$$

где $U(\lambda)$ – регулятор (2) в частотной области.

Введем (2×2)-матрицы:

$$\mathrm{A}(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$
$$W(\lambda) = \left[\mathrm{A}(\lambda) b, \quad b\right], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим слабо циклический случай:

$$\det W(\lambda) = c\left(\gamma_0 + e^{-\lambda h}\right), (c \neq 0).$$

Матрица $\mathrm{A}(\lambda)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$\mathrm{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0 + e^{-\lambda h}\right) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\beta_i, i = 0, 1, 2, \gamma_0$ – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda), j = 1, 2$ – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1, 2, j = 0, 1, 2.$

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U(\lambda) = \left(\tfrac{1}{c}\eta_1(\lambda) - a_1(\lambda), \quad \eta_2(\lambda) - a_2(\lambda)\right).$$

Возможны два случая:

$$\text{i) } \beta_2\gamma_0 + 1 = 0,$$
$$\text{ii) } \beta_2\gamma_0 + 1 \neq 0.$$

Теорема 1. В случае i) система (1) модально управляема регулятором вида (2) тогда и только тогда, когда $\beta_0 - \beta_1\gamma_0 \neq 0$.

Нетрудно показать, что в этом случае задачу модального управления решает следующий регулятор:

$$\eta_1(\lambda) = \beta_2 \frac{\alpha_{21}\beta_2 + \beta_2^2 + \alpha_{22}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda^3 e^{-\lambda h} + \beta_2 \times$$
$$\times \frac{\alpha_{11}\beta_2 + 2\beta_1\beta_2 - \alpha_{22}\beta_0 + \alpha_{12} + \alpha_{10}\beta_2^2 + \alpha_{21}\beta_1 + \beta_0\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda^2 e^{-\lambda h} +$$
$$+ \beta_2 \frac{\alpha_{11}\beta_1 + 2\beta_0\beta_1\beta_2 + \beta_1^2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_2^2 + 2\alpha_{10}\beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} +$$
$$+ \frac{\alpha_{00}\beta_2^2 + \alpha_{01}\beta_2 + \alpha_{02} - \alpha_{12}\beta_0 + \beta_0^2\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda e^{-\lambda h} +$$
$$+ \beta_2 \frac{\beta_0\beta_1^2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_1\beta_2 - \alpha_{02}\beta_0 + \beta_0^2\beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} +$$
$$+ \frac{\alpha_{00}\beta_1\beta_2 + \alpha_{01}\beta_1 + \alpha_{10}\beta_1^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} e^{-\lambda h} + \left(\alpha_{00} + \beta_0^2 + \beta_0\alpha_{10}\right)\beta_2,$$

$$\eta_2(\lambda) = \frac{\alpha_{21}\beta_2 + \beta_2^2 + \alpha_{22}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda^2 e^{-\lambda h} +$$
$$+ \frac{\alpha_{11}\beta_2 + \beta_0\beta_2^2 + \alpha_{10}\beta_2^2 + \alpha_{12} + \beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda e^{-\lambda h} +$$
$$+ \frac{\beta_0\beta_1\beta_2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_2^2 + \beta_0^2\beta_2^2 + \alpha_{00}\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} +$$
$$+ \frac{\alpha_{10}\beta_2 + \alpha_{10}\beta_1\beta_2 + \alpha_{02}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} e^{-\lambda h} - \beta_0 - \alpha_{10}.$$

Рассмотрим случай ii). Введем обозначения:

$$\xi = \frac{\beta_0 - \beta_1\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}, \qquad \delta_1 = \gamma_0 + e^{-\xi h}.$$

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) в случае ii) была модально управляема регулятором вида (2), необходимо и достаточно выполнения условия $\delta_1 \neq 0$.

Можно показать, что задачу модального управления решает регулятор вида

$$\eta_1(\lambda) = \left(\frac{-\beta_2 - \alpha_{21} + \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}\beta_2 - \alpha_{22}\right)\lambda^2 e^{-\lambda h} +$$
$$+ \left(-\frac{\left(\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0\right)\left(\beta_0\beta_2 + \beta_1\right)}{1 + \beta_2\gamma_0} - \alpha_{12} - \right.$$
$$- \frac{\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0 - \alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2 + \alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^2} -$$
$$- \frac{\alpha_{11}\beta_2\gamma_0 + \beta_0\beta_2 + \alpha_{10}\beta_2 + \beta_1 - \alpha_{12}\gamma_0}{\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^2}\beta_2 -$$
$$\left. - \frac{-\alpha_{21}\beta_1\gamma_0 + \alpha_{11} + \alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^2}\beta_2 \right)\lambda e^{-\lambda h} -$$
$$- \frac{\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}\beta_0\beta_1 e^{-\lambda h} - \frac{\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}\beta_0^2 -$$
$$- \frac{3\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0^2 + \alpha_{12}\beta_0\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0^2\gamma_0 - \alpha_{11}\beta_0\gamma_0 + \alpha_{22}\beta_0\beta_1\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$
$$- \frac{3\alpha_{00}\beta_2\gamma_0 - \beta_0\beta_1\gamma_0 + \alpha_{22}\beta_0^2\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_1\gamma_0 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$
$$- \frac{\alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^4 + \alpha_{21}\beta_1^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$
$$- \frac{\alpha_{00} - \beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^2 + \alpha_{01}e^{-\xi h} + 2\alpha_{10}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$
$$- \frac{2\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 + 2\alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^3 + \alpha_{21}\beta_0\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$
$$- \frac{\alpha_{22}\beta_0\beta_1\gamma_0^3 + \alpha_{10}\beta_0 + \beta_0^2 + \beta_0^2\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$
$$- \frac{2\alpha_{02}\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^4 + \alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{\alpha_{02}\gamma_0 e^{-\xi h}+\alpha_{12}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3 e^{-\xi h}+\alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{10}\beta_1 e^{-\xi h}+\alpha_{00}\beta_2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{2\alpha_{01}\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{11}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^2 e^{-\xi h}+\alpha_{01}\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^3+2\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0 e^{-\xi h}+\alpha_{10}\beta_1\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{11}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3+\alpha_{22}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^3-\alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{11}\beta_1\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{22}\beta_1^2\gamma_0^3 e^{-\xi h}+\alpha_{10}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{10}\beta_0\beta_2 e^{-\xi h}+\alpha_{12}\beta_1\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\beta_0^2\beta_2 e^{-\xi h}-\beta_1^2\gamma_0 e^{-\xi h}+\beta_0\beta_1 e^{-\xi h}-\alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{21}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3+\alpha_{12}\beta_1\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{22}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}-\alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{11}\beta_1\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0+\alpha_{10}\beta_0\beta_2^2\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\left(\frac{-\alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0+\alpha_{11}\beta_2\gamma_0+\beta_0\beta_2}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_{10}\beta_2+\beta_1-\alpha_{12}\gamma_0-\alpha_{21}\beta_1\gamma_0+\alpha_{11}+\alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}\right)\beta_1 e^{-\lambda h}-$$

$$-\left(\frac{\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}+\right.$$

$$+\frac{\alpha_{11}\beta_2\gamma_0+\beta_0\beta_2+\alpha_{10}\beta_2+\beta_1}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}+$$

$$\left.+\frac{-\alpha_{12}\gamma_0-\alpha_{21}\beta_1\gamma_0+\alpha_{11}+\alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}\right)\beta_0-$$

$$-\left(\frac{\alpha_{02}\gamma_0+2\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0+\alpha_{02}e^{-\xi h}-\beta_0^2\beta_2+2\alpha_{02}\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+\right.$$

$$+\frac{\alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^3-\beta_1^2\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{12}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^4+\alpha_{10}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_1\beta_2\gamma_0^3-\alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}+\alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^4-\alpha_{22}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{21}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{3\alpha_{02}\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}+3\alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}+\alpha_{02}\beta_2^3\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{2\alpha_{21}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^2+2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3-\alpha_{11}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^3+\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{10}\beta_1\beta_2\gamma_0-\alpha_{11}\beta_1\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{01}\beta_2\gamma_0-\alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{-\alpha_{10}\beta_0\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{11}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2-\alpha_{10}\beta_0\beta_2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$\left.+\frac{\alpha_{01}\beta_2^3\gamma_0^3+2\alpha_{01}\beta_2^2\gamma_0^2-2\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{00}\beta_2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}\right)e^{-\lambda h}-$$

$$-\left(\frac{\alpha_{11}\beta_0\beta_1\gamma_0-\alpha_{10}\beta_0^2\beta_2-\alpha_{02}\beta_1\gamma_0^2-\alpha_{12}\beta_0\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+\right.$$

$$+\frac{-\alpha_{00}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2-\alpha_{11}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^3-\beta_0^3\beta_2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{01}\beta_1\gamma_0-\alpha_{22}\beta_1^3\gamma_0^4+\alpha_{21}\beta_1^3\gamma_0^3-\alpha_{00}\beta_0\beta_2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}\beta_0\beta_1^2\beta_2\gamma_0^4+\alpha_{11}\beta_0^2\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{11}\beta_1^2\gamma_0^2+2\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\gamma_0+\alpha_{10}\beta_1^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{10}\beta_0\beta_1+\alpha_{12}\beta_1^2\gamma_0^3-\alpha_{00}\beta_1-\beta_1^3\gamma_0^2+\alpha_{10}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\gamma_0+\alpha_{01}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^3-\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^4+2\alpha_{01}\beta_1\beta_2\gamma_0^2-2\alpha_{00}\beta_1\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{02}\beta_0\beta_2\gamma_0^2-2\alpha_{02}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3-2\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{2\alpha_{22}\beta_0\beta_1^2\gamma_0^3-2\alpha_{02}\beta_1\beta_2\gamma_0^3-\alpha_{02}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^4}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{01}\beta_0\beta_2\gamma_0+2\alpha_{01}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2+2\beta_0^2\beta_1\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\beta_0\beta_1^2\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{02}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^4-\alpha_{11}\beta_0\beta_1\beta_2^2\gamma_0^3}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\beta_2\gamma_0^2+2\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\beta_2\gamma_0^3+\alpha_{10}\beta_0\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_0\beta_1\beta_2^2\gamma_0^4+\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\beta_2\gamma_0^3}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{12}\beta_0^2\beta_2^2\gamma_0^3-\alpha_{12}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{21}\beta_0^3\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{22}\beta_0^3\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{11}\beta_0^2\beta_2\gamma_0-\alpha_{10}\beta_0^2\beta_2^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$\left.+\frac{-\alpha_{00}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^2+\alpha_{01}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^3-2\alpha_{00}\beta_0\beta_2^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}\right)\frac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi},$$

$$\eta_2(\lambda)=$$

$$=\frac{-\beta_2+\alpha_{22}\gamma_0-\alpha_{21}-\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{21}\beta_2\gamma_0+\alpha_{22}\beta_2\gamma_0^2}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}\lambda e^{-\lambda h}+$$

$$+\frac{-2\beta_0\beta_2-\beta_0\beta_2^2\gamma_0-\beta_1+\alpha_{21}\beta_1\gamma_0+\alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{22}\beta_0\gamma_0}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}e^{-\lambda h}+$$

$$+\frac{-\alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2+\alpha_{12}\gamma_0-\alpha_{11}-\alpha_{21}\beta_0-\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{10}\beta_2-\alpha_{11}\beta_2\gamma_0}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}e^{-\lambda h}+$$

$$+\frac{-\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0^2-\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2-2\beta_0\beta_2\gamma_0-\alpha_{10}-2\alpha_{10}\beta_2\gamma_0-\beta_0}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}+$$

$$+\left(\frac{-\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0^2-\alpha_{12}\beta_0\gamma_0^2+\alpha_{01}\beta_2^2\gamma_0^3+\alpha_{21}\beta_0^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+\right.$$

$$+\frac{\alpha_{11}\beta_0\gamma_0-2\alpha_{02}\beta_2\gamma_0^3+\alpha_{12}\beta_1\gamma_0^3}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{2\alpha_{01}\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^4-2\alpha_{00}\beta_2\gamma_0+2\beta_0\beta_1\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{10}\beta_1\gamma_0-\alpha_{22}\beta_1^2\gamma_0^4-\alpha_{22}\beta_0^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{21}\beta_1^2\gamma_0^3-\alpha_{00}+\alpha_{01}\gamma_0-\alpha_{02}\gamma_0^2+\alpha_{10}\beta_1\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{-\alpha_{11}\beta_1\beta_2\gamma_0^3+\alpha_{12}\beta_1\beta_2\gamma_0^4-\alpha_{10}\beta_0\beta_2\gamma_0+\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^3-2\alpha_{21}\beta_0\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$\left.+\frac{2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\gamma_0^3-\alpha_{10}\beta_0-\beta_0^2-\beta_1^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}\right)\times$$

$$\times\frac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}.$$

Заключение. Таким образом, полученные регуляторы решают задачу модального управления в слабо циклическом случае.

Литература

1. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.

References

1. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 3–7 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 14.03.2016